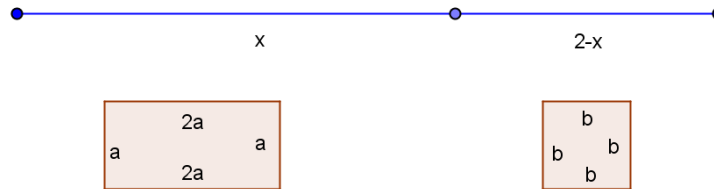


Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 5 de 2012.

[2'5 puntos] Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

Solución



Función a optimizar Área = área rectángulo + área cuadrado = $2a^2 + b^2$

Relaciones: perímetro: $6a = x \rightarrow a = x/6$; $4b = 2 - x \rightarrow b = (2 - x)/4$.

Mi función $A(x) = 2(x^2/36) + (2 - x)^2/16$

El mínimo anula $A'(x)$

$A'(x) = 4x/36 - 2(-1)(2 - x)/16$,

De $A'(x) = 0 \rightarrow x/9 - 2(2 - x)/16 = 0 \rightarrow x/9 = (2 - x)/8 \rightarrow 8x = 18 - 9x \rightarrow 17x = 18 \rightarrow x = 18/17$ m.

Veamos que es mínimo $A''(x) = 4/36 + 2/16 > 0$, luego es mínimo independientemente del valor de "x"

Dimensiones pedidas: $x = 18/17$ m. y $2 - x = 2 - 18/17 = 16/17$ m.

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 5 de 2012.

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

(a) [0'5 puntos] Realiza un esbozo de dicho recinto.

(b) [2 puntos] Calcula su área.

Solución

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

(a)

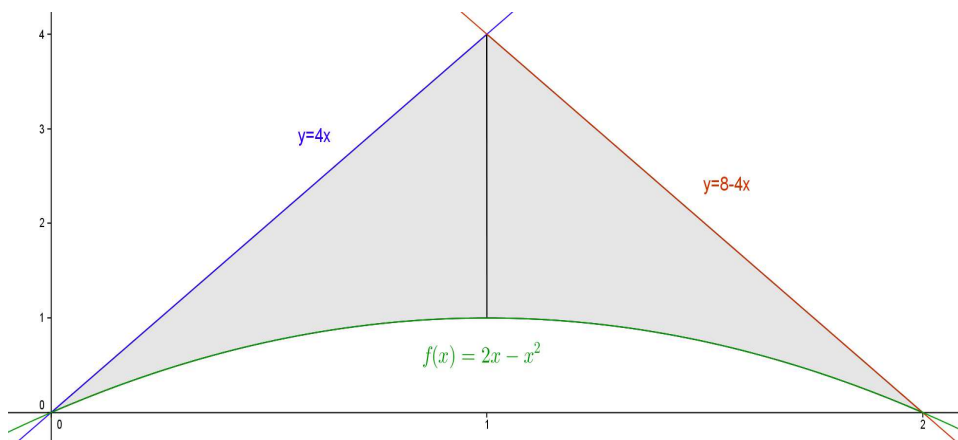
Realiza un esbozo de dicho recinto.

$y = 4x$ es una recta, con dos valores basta, el (0,0) y el (1,4)

$y = 8 - 4x$ es una recta, con dos valores basta, el (1,4) y el (2,0)

$f(x) = 2x - x^2$ es unaparábola con las ramas hacia abajo, corte con los eje en (0,0) y (2,0), y abscisa de su vértice en la solución de $f'(x) = 0 = 2 - 2x \rightarrow x = 1$, luego $V(1,1)$.

Un esbozo de las gráficas es el siguiente: (Veremos las abscisas donde se cortan para el área)



$y = 4x$ e $y = 8 - 4x$ se cortan en $4x = 8 - 4x$, de donde $8x = 8$. $\rightarrow x = 1$.

$y = 4x$ y $f(x) = 2x - x^2$ se cortan en $4x = 2x - x^2$. Las soluciones de $x^2 + 2x = 0$ son $x = 0 \rightarrow x = -2$.

$y = 8 - 4x$ e $y = 2x - x^2$ se cortan en $8 - 4x = 2x - x^2$, de donde $x^2 - 6x + 8 = 0$. Sus soluciones son $x=2$ y $x=4$.

Como sólo me lo piden en el primer cuadrante, nos interesan las abscisas $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

(b)

Calcula su área.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 [(4x)-(2x-x^2)]dx + \int_1^2 [(8-4x)-(2x-x^2)]dx = \int_0^1 [2x+x^2]dx + \int_1^2 [x^2 - 6x + 8]dx = \\ &= [x^2 + x^3/3]_0^1 + [x^3/3 - 3x^2 + 8x]_1^2 = [(1+1/3)-(0)] + [(8/3-12+16) - (1/3-3+8)] = \\ &= 4/3 + 20/3 - 16/3 = 8/3 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 5 de 2012.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ky + 2z = k + 1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ (k+1)x + y + z = k + 2 \end{cases}$$

(a) [1'25 puntos] Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.

(b) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?

(c) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para k = 0.

Solución

(a) y (b)

Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(2-k) - (k)(1-k^2-k) + (2)(1-2k-2) = 2-k-k+k^3+k^2-2-4k = k^3+k^2-6k = k(k^2+k-6)$$

Resolviendo la ecuación $k(k^2+k-6) = 0$, tenemos $k = 0$, y de $k^2+k-6 = 0$ obtenemos $k = -3$ y $k = 2$.

Si $k \neq 0$, $k \neq -3$ y $k \neq 2$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $k = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A)=2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(-5) - (-3)(5) + (-2)(5) = -5 + 15 - 10 = 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si $k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A)=2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos
primera = $(1)(1) - 0 + (1)(-1) = 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.
fila

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Por tanto para $k = -3$, $k = 0$ y $k = 2$, el sistema tiene más de una solución.

(c)

Resuelve el sistema para $k = 0$.

Hemos visto en el apartado anterior que si $k = 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$x + 2z = 1$$

$$x + 2y = 3. \text{ Tomo } \mathbf{x} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \text{ con lo cual tenemos } z = 1/2 - a/2 \text{ e } y = 3/2 - a/2, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

La solución del sistema es $(x, y, z) = (a, 3/2 - a/2, 1/2 - a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 5 de 2012.

Se consideran los vectores $\mathbf{u} = (k, 1, 1)$; $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$ y $\mathbf{w} = (1, 1, k)$, donde k es un número real.

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de k para los que \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son linealmente dependientes.

(b) [1 punto] Determina los valores de k para los que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ son ortogonales.

(c) [0'75 puntos] Para $k = -1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a \mathbf{v} y \mathbf{w} y tienen módulo 1.

Solución

Se consideran los vectores $\mathbf{u} = (k, 1, 1)$; $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$ y $\mathbf{w} = (1, 1, k)$, donde k es un número real.

(a)

Determina los valores de k para los que \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son linealmente dependientes.

Los vectores son linealmente dependientes si su determinante es cero.

$$\det(\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}) = 0 = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 + F_1(-1) \\ F_3 + F_1(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2-k & 0 & -3 \\ 1-k & 0 & k-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_3 + C_1 \\ C_3 + C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1+k \\ 2-k & 0 & -1-k \\ 1-k & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = -(-1)(0 - (-1-k)(1-k)) =$$

$$= (-1-k)(1-k) = k^2 - 1 = 0, \text{ luego } \mathbf{k = \pm 1 \text{ para que los vectores sean dependientes.}}$$

(b)

Determina los valores de k para los que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ son ortogonales.

Los vectores son ortogonales si su producto escalar (\bullet) es cero.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (k, 1, 1) + (2, 1, -2) = (k+2, 2, -1)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (2, 1, -2) - (1, 1, k) = (1, 0, -2-k)$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = (k+2, 2, -1) \bullet (1, 0, -2-k) = 0 = k+2 + 0 + k+2 = 2k+4 = 0, \text{ de donde } \mathbf{k = -2 \text{ para que sean ortogonales.}}$$

(c)

Para $k = -1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a \mathbf{v} y \mathbf{w} y tienen módulo 1.

El vector perpendicular a la vez a \mathbf{v} y \mathbf{w} es su producto vectorial (\times).

$$\mathbf{v} = (2, 1, -2) \text{ y } \mathbf{w} = (1, 1, -1).$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(1) = (1, 0, 1).$$

Como me dicen que el vector sea unitario dividimos dicho vector por su módulo $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
El vector pedido es $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$.

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo 5 de 2012.

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

Solución

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(a)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me piden la monotonía es decir el estudio de la 1ª derivada.

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x+3 - (x^2+3x+3)}{x^2+3x+3} = \frac{-x^2 - x}{x^2+3x+3}.$$

De $f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x = 0 = x(-x-1)$, de donde $x = 0$ y $x = -1$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = -2/(+) < 0$, f es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-\infty, -1)$.

Como $f'(-0'1) = (-0'1)(-0'9)/(+) > 0$, f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-1, 0)$.

Como $f'(1) = -2/(+) < 0$, f es estrictamente decreciente en (\searrow) $(0, +\infty)$.

Por definición $x = -1$ es un mínimo relativo y vale $f(-1) = \ln(1) + 1 = 1$.

Por definición $x = 0$ es un máximo relativo y vale $f(0) = \ln(3) + 0 = \ln(3)$.

(b)

Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

La ecuación de la recta normal en $x = -2$ es " $y - f(-2) = [-1/f'(-2)] \cdot (x + 2)$ "

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x \rightarrow f(-2) = \ln(1) - (-2) = 2$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x}{x^2 + 3x + 3} \rightarrow f'(-2) = (-2)/1 = -2$$

La ecuación de la recta normal en $x = -2$ es " $y - 2 = (1/2) \cdot (x + 2)$ "

Ejercicio 2, Opción B, Modelo 5 de 2012.

[2'5 puntos] Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$,

donde \ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4)$.

Solución

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$, donde \ln

denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4)$.

Como tiene un extremo relativo en $x = 1$, tenemos $f'(1) = 0$

$$f(x) = ax^2 + b \ln(x)$$

$$f'(x) = 2ax + b/x, \text{ de donde } f'(1) = 0 \text{ nos dá } 2a + b = 0, \text{ luego } \mathbf{b = -2a}.$$

$$\text{Nuestra función es } f(x) = ax^2 - 2a \ln(x)$$

$$\text{De } \int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4), \text{ tenemos } \int_1^4 (ax^2 - 2a \ln(x)) dx = 27 - 8 \ln(4) = \{**\} = [ax^3/3 - 2a(x \cdot \ln x - x)]_1^4 =$$

$$= (64a/3 - 2a(4 \cdot \ln(4) - 4)) - (a/3 - 2a(0 - 1)) = 64a/3 - 8a \cdot \ln(4) + 8a - a/3 + 2a = 27a - 8a \cdot \ln(4), \text{ de donde obtenemos que } \mathbf{a = 1} \text{ y } \mathbf{b = -2}.$$

{**} La integral $\int \ln(x) dx$, que es una integral por partes. ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$)

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \ln(x) dx = \{ u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x; dv = dx \rightarrow v = x \} = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot dx/x = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot \ln(x) - x.$$

Ejercicio 3, Opción B, Modelo 5 de 2012.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

- (a) [1 punto] Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.
(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

Solución

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

- (a)
Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

A tiene inversa si $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13 \neq 0, \text{ luego A tiene inversa.}$$

Sabemos que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, si A y B son matrices cuadradas de igual orden.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 13 \cdot \det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 7 = -13, \text{ de donde } \det(B) = -13/13 = -1 \neq 0, \text{ luego B tiene}$$

inversa.

(b)

Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

Multiplicamos la expresión anterior por A por la izquierda

$$AA^{-1}X - AB = ABA, \text{ de donde } X = AB + ABA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 36 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4, Opción B, Modelo 5 de 2012.

[2'5 puntos] Encuentra los puntos de la recta $r \equiv (x-1)/4 = (2-y)/2 = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.

Solución

Ponemos la recta en paramétricas recta $r \equiv (x-1)/4 = (2-y)/2 = z-3 = \lambda \in \mathbb{R}$, de donde

$$x = 1 + 4\lambda$$

$$-y = -2 + 2\lambda, \text{ luego } y = 2 - 2\lambda,$$

$$z = 3 + \lambda.$$

Un punto genérico de la recta "r" es $X(x,y,z) = X(1 + 4\lambda, 2 - 2\lambda, 3 + \lambda)$.

Le imponemos a este punto que su distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z - 1 = 0$ sea 4 u.

$$d(X, \pi) = \frac{|(1+4\lambda) - 2(2-2\lambda) + 2(3+\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|2 + 10\lambda|}{3} = 4, \text{ de donde } |2 + 10\lambda| = 12, \text{ que nos dan lugar a dos}$$

ecuaciones:

$$+(2 + 10\lambda) = 12, \text{ de donde } \lambda = 1 \text{ y el punto es } X_1(1 + 4(1), 2 - 2(1), 3 + (1)) = X_1(5, 0, 4).$$

$$+(2 + 10\lambda) = -12, \text{ de donde } \lambda = -14/10 = -7/5 \text{ y el punto es } X_2(1 + 4(-7/5), 2 - 2(-7/5), 3 + (-7/5)) = X_2(-23/5, 24/5, 8/5).$$

Luego hay dos puntos el $X_1(5, 0, 4)$ y el $X_2(-23/5, 24/5, 8/5)$.